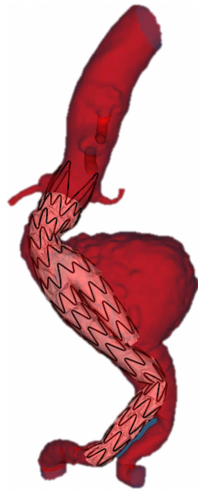


Les mathématiques au service des chirurgiens

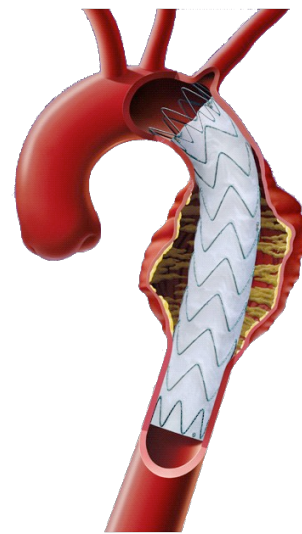
Représentation d'une endoprothèse vasculaire en coordonnées curvilignes



Contexte général : L'une des missions de l'entreprise PrediSurge est d'aider les chirurgiens du système cardio-vasculaire à planifier leurs opérations de pose de prothèses en simulant l'acte médical sur une modélisation 3D de l'anatomie du patient. Ainsi, comparer les résultats de plusieurs scénarii (différentes prothèses, différentes dimensions, différentes positions de largage, différents montages multi-prothèses, etc.) avant même de réaliser l'opération permet au chirurgien de trancher sur la stratégie et le matériel à adopter pour chaque cas et chaque patient.

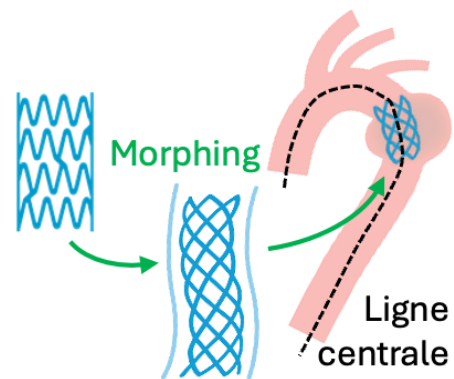
Le sens de la mission est directement lié à l'aide à la décision via notre dispositif médical logiciel qui a pour but ultime de sauver des vies.

Contexte du sujet : L'une des nombreuses étapes de la simulation de déploiement d'une prothèse dans une artère consiste à déformer les différents éléments (prothèse et/ou artère) afin de les placer l'un dans l'autre, malgré des anatomies parfois tortueuses. Cette étape, appelée « *Morphing* », a plusieurs approches possibles, dont une qui nous intéresse dans le cadre de ce sujet : le morphing « *FlexiFlow* », consistant à déformer la prothèse autour d'une *ligne centrale* parcourant l'intérieur de l'artère.



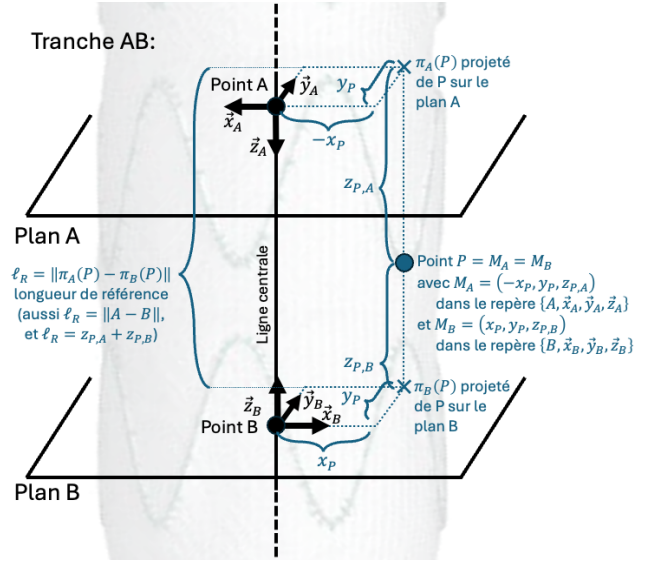
Méthode et problématique :

- L'idée de l'approche *FlexiFlow* est d'associer la prothèse à une ligne centrale droite, de repérer chaque nœud du maillage de la prothèse par un système de coordonnées *ad hoc* (que l'on nommera « représentation curviligne »), puis de déformer la ligne centrale de la prothèse vers la forme de la ligne centrale de l'artère en faisant suivre chacun des nœuds de la prothèse grâce à sa représentation curviligne.
- Le problème est qu'il est possible d'attribuer des coordonnées curvilignes à la prothèse car sa ligne centrale initiale est droite. Nous souhaiterions pouvoir établir la représentation curviligne d'un nœud par rapport à une ligne centrale initialement quelconque afin de généraliser le morphing *FlexiFlow* en une méthode générique de transformation de l'espace.



Formulation mathématique

La ligne centrale initialement droite est une suite de points alignés (seules leurs coordonnées z diffèrent), et chaque nœud du maillage à représenter est transformé en un ensemble de 3 nombres représentants ses coordonnées curvilignes *ad hoc* : (x_P, y_P, t) . Les 2 premiers nombres sont calculés par projection sur les plans orthogonaux à la ligne centrale la coupant en 2 points A et B consécutifs entourant P, comme montré sur la figure ci-contre.



Pour calculer la coordonnée t , il faut trouver la valeur satisfaisant la relation

suivante : $\beta_{\mu, \omega, \pi_A(P), P, P, \pi_B(P)}(t) = P$, où la fonction β définit la « ligne de support » du point P (en particulier : $\beta_{[\dots]}(0) = \pi_A(P)$ et $\beta_{[\dots]}(1) = \pi_B(P)$). La formule générale de cette fonction est :

$$\beta_{\mu, \omega, P_1, P_2, P_3, P_4, P_5} : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto \mu \omega(t) B3_{P_1, P_3, P_5}(t) + (1 - \mu \omega(t)) B4_{P_1, P_2, P_4, P_5}(t) \end{cases}$$

soit une combinaison de 2 courbes de Bézier définies par l'expression générale :

$$B3_{D, E, F} : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto (1 - t)^2 D + 2 t (1 - t) E + t^2 F \end{cases}$$

pour la Bézier à 3 points, et, pour la Bézier à 4 points :

$$B4_{G, H, I, J} : \begin{cases} [0, 1] & \rightarrow \mathbb{R}^3 \\ t & \mapsto (1 - t)^3 G + 3 (1 - t)^2 t H + 3 (1 - t) t^2 I + t^3 J \end{cases}$$

et où, en plus du « coefficient de mixage » $\mu \in \mathbb{R}$, la combinaison fait entrer en jeu une « fonction de mixage » ω qui peut être choisie parmi notamment :

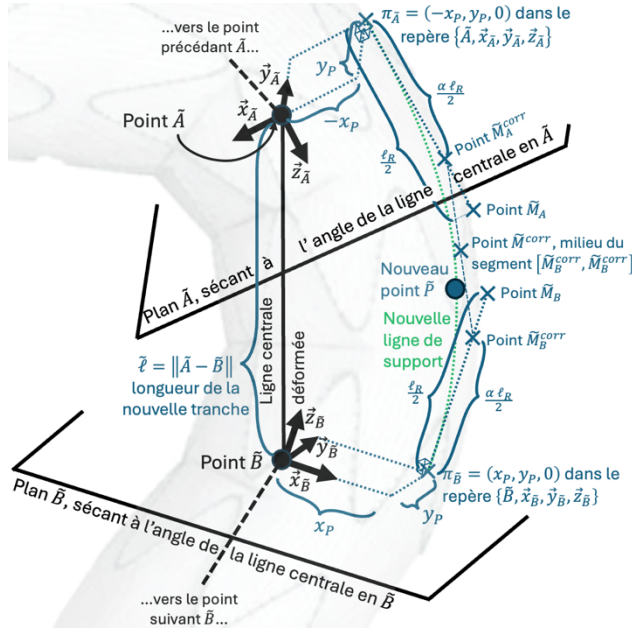
- Mixage circulaire : $\omega : t \mapsto \sqrt{1 - (2t - 1)^2}$
- Mixage quadratique : $\omega : t \mapsto -4 (t - 1/2)^2 + 1$
- Mixage quartique : $\omega : t \mapsto -16 (t - 1/2)^4 + 1$

Problématique #1 : Actuellement, le calcul de la coordonnée curviligne t du point P se fait par dichotomie (avec des évaluations successives de la fonction β). Est-il possible, connaissant $\ell_R, z_{P,A}$, et $z_{P,B}$, de calculer analytiquement t , a minima dans certains cas particuliers de mixages μ, ω ?

Introduire $\bar{t} \triangleq \frac{z_{P,A}}{\ell_R} = 1 - \frac{z_{P,B}}{\ell_R}$ ($\bar{t}$ est la proportion géométrique de P dans la tranche AB) et trouver une fonction $\tau : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ telle que $(\beta \circ \tau)(\bar{t}) = \beta(t)$.

¹ Cette fonction sert notamment à garantir (et conserver, après déformation) l'orthogonalité de la ligne de support aux plans A et B.

Déformation de la ligne centrale



Lorsque la ligne centrale se déforme, les points A et B changent. On nommera $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ leurs nouvelles positions respectives, et, de manière générale, on ajoutera un tilde $\sim$ à toutes les quantités se rapportant à un état après déformation de la ligne centrale.

À l'aide des coordonnées curvilignes de P calculées initialement, on peut trouver les points $\pi_{\tilde{A}}$ et $\pi_{\tilde{B}}$ comme représentés sur la figure ci-contre. Ainsi, et avec quelques points supplémentaires (procédé détaillé ci-après), on peut calculer une nouvelle ligne de support et, avec la coordonnée t , trouver la nouvelle position du point P (notée $\tilde{P}$).

Procédé de calibration de la ligne de support déformée :

Les coordonnées curvilignes (x_P, y_P, t) du point P ont pu être connues grâce aux projections $\pi_A(P)$ et $\pi_B(P)$ et à la dichotomie en t , le tout réalisé sur la géométrie initiale alignée². De plus, nous disposons de la longueur de référence ℓ_R de la tranche.

Maintenant que la ligne est déformée, les plans $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ sont calculés (de manière à ce qu'ils bissectent les angles de la ligne centrale auxquels ils correspondent), la nouvelle longueur $\tilde{\ell} = \|\tilde{A} - \tilde{B}\|$ (où $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ désignent ici les points, et non les plans) est connue, et les points $\pi_{\tilde{A}}$ et $\pi_{\tilde{B}}$ peuvent être trouvés grâce aux 2 premières coordonnées curvilignes x_P et y_P , et aux nouveaux repères $\{\tilde{A}, \tilde{x}_{\tilde{A}}, \tilde{y}_{\tilde{A}}, \tilde{z}_{\tilde{A}}\}$ et $\{\tilde{B}, \tilde{x}_{\tilde{B}}, \tilde{y}_{\tilde{B}}, \tilde{z}_{\tilde{B}}\}$, respectivement.

Définissons maintenant un coefficient de correction de longueur et de courbure³ : $\alpha \triangleq \frac{1}{2} \left(\frac{\ell_R}{\tilde{\ell}} - \frac{\tilde{\ell}}{\ell_R} \right) \langle \tilde{z}_{\tilde{A}} | \tilde{z}_{\tilde{B}} \rangle + \frac{1}{2} \left(\frac{\ell_R}{\tilde{\ell}} + \frac{\tilde{\ell}}{\ell_R} \right)$, et les points $\tilde{M}_A, \tilde{M}_B, \tilde{M}_A^{corr}, \tilde{M}_B^{corr}, \tilde{M}_A^{corr}, \tilde{M}_B^{corr}$ comme suit :

$$\tilde{M}_A \triangleq \tilde{A} - x_P \tilde{x}_{\tilde{A}} + y_P \tilde{y}_{\tilde{A}} + \frac{\ell_R}{2} \tilde{z}_{\tilde{A}} \quad \tilde{M}_B \triangleq \tilde{B} + x_P \tilde{x}_{\tilde{B}} + y_P \tilde{y}_{\tilde{B}} + \frac{\ell_R}{2} \tilde{z}_{\tilde{B}} \quad \tilde{M} = \tilde{M}_A + \frac{1}{2}(\tilde{M}_B - \tilde{M}_A)$$

$$\tilde{M}_A^{corr} = \pi_{\tilde{A}} + \alpha(\tilde{M}_A - \pi_{\tilde{A}}) \quad \tilde{M}_B^{corr} = \pi_{\tilde{B}} + \alpha(\tilde{M}_B - \pi_{\tilde{B}}) \quad \tilde{M}^{corr} = \tilde{M}_A^{corr} + \frac{1}{2}(\tilde{M}_B^{corr} - \tilde{M}_A^{corr})$$

La ligne de support déformée est alors définie comme $\beta_{\mu, \omega, \pi_{\tilde{A}}, \tilde{M}_A^{corr}, \tilde{M}^{corr}, \tilde{M}_B^{corr}, \pi_{\tilde{B}}}$, et le nouveau point $\tilde{P}$ peut alors être immédiatement obtenu avec :

$$\tilde{P} = \beta_{\mu, \omega, \pi_{\tilde{A}}, \tilde{M}_A^{corr}, \tilde{M}^{corr}, \tilde{M}_B^{corr}, \pi_{\tilde{B}}}(t)$$

² Lorsque la géométrie initiale n'est pas alignée (ligne centrale composée de points non-alignés), on arrive justement au problème mentionné en dessous : « le cas initialement courbé ».

³ Le coefficient α est le plus simple (fonction affine en $\langle \tilde{z}_{\tilde{A}} | \tilde{z}_{\tilde{B}} \rangle$) tel que si les plans « se font face » (i.e.

$\langle \tilde{z}_{\tilde{A}} | \tilde{z}_{\tilde{B}} \rangle = -1$) alors $\alpha = \frac{\tilde{\ell}}{\ell_R}$, et à l'inverse si les plans forment un demi-tour (i.e. un virage de π radians, donc $\langle \tilde{z}_{\tilde{A}} | \tilde{z}_{\tilde{B}} \rangle = 1$) alors $\alpha = \frac{\ell_R}{\tilde{\ell}}$. Il possède également la propriété suivante : si $\tilde{\ell} = \ell_R$, alors $\alpha = 1$ quel que soit l'angle entre les plans.

Généralisation : le cas initialement courbé

Rappelons que nous avons pu obtenir les coordonnées curvilignes de notre point d'intérêt (x_p, y_p, t) grâce à des projections et une dichotomie sur une géométrie présentant une ligne centrale alignée (les points de cette dernière avaient tous les mêmes coordonnées en x et en y).

Problématique #2 : Comment déterminer ces coordonnées curvilignes dans une géométrie initialement non-alignée, sachant que les coordonnées curvilignes dépendent de projections qui ne sont plus des projections lorsque la ligne centrale est déformée ?

Note : $\alpha = 1$ dans ce cas car la longueur initiale de référence de la tranche est la distance entre les points A et B sur la géométrie initialement courbée.

Validation : La méthode sera validée si, en faisant la transformation inverse (réalignement de la ligne centrale), le point d'intérêt se retrouve aligné avec les points extrêmes de sa ligne de support (ils seront alors bien des « projections lorsque tout est aligné »).

